Intégrale de Dirichlet

Application 1. $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$

Démonstration.

On considère la fonction suivante :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (t,x) & \longmapsto & \begin{cases} \frac{\sin x}{x} e^{-tx} & \text{si} \quad x > 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

On pose également $F(t) = \int_0^{+\infty} f(t,x)\,dx$ pour $t \in \mathbb{R}^{+\star}$. Cette application est bien définie sur $\mathbb{R}^{+\star}$ puisque $|f(t,x)| = \mathcal{O}\left(e^{-tx}\right)$ est intégrable et $x \mapsto f(t,x)$ est continue sur $\mathbb{R}^{+\star}$.

Étape 1 : Vérifions que l'intégrale de Dirichlet $F(0)$ est semi-convergente.

Pour tout $A \geqslant 0$, on a :

$$\int_0^A \frac{\sin x}{x}\,dx = \left[\frac{1-\cos x}{x}\right]_0^A + \int_0^A \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx$$

Lorsque A tends vers $+\infty$, le crochet tend vers 0, et l'intégrale de droite converge puisque le terme sous l'intégrale est un $\mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Donc $F(0)$ est bien définie.

Étape 2 : Montrons que F est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$.

On va appliquer le théorème de dérivabilité sous le signe intégral. En effet, on a :

- Pour tout $t > 0$, $x \mapsto f(t,x)$ est intégrable.
- Pour tout $x \geqslant 0$, $t \mapsto f(t,x)$ est dérivable, de dérivée $\frac{\partial f}{\partial t}(t,x) = -\sin(x)e^{-tx}$.
- Pour tous $t > \alpha > 0$, $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right| = |\sin(x)|e^{-\alpha x} \leqslant e^{-\alpha x}$ est intégrable.

Ainsi F est dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$, et pour tout $t > 0$, on a :

$$F'(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\,dx = -\int_0^{+\infty} \sin(x)e^{-tx}\,dx = -\operatorname{Im}\left(\int_0^{+\infty} e^{(i-t)x}\,dx\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{1}{i-t}\right) = -\frac{1}{1+t^2}$$

Étape 3 : Donnons une expression de F sur $\mathbb{R}^{+\star}$.

Puisque $F'(t) = -\frac{1}{1+t^2}$, on a $F(t) = C - \arctan(t)$ pour $t > 0$, où $C \in \mathbb{R}$ est une constante à déterminer. Comme $|f(t,x)| \leqslant e^{-\alpha x}$ pour $t \geqslant \alpha > 0$, le théorème de convergence dominée donne $\lim_{t\to+\infty} F(t) = 0$. On a alors $C = \frac{\pi}{2}$, donc $F(t) = \frac{\pi}{2} - \arctan(t)$ pour $t > 0$.

Étape 4 : Montrons que F est continue en 0.

Soient $t \geqslant 0$ et $A > 0$. Alors :

$$\begin{aligned} |F(t) - F(0)| &= \left|F(t) - \int_0^A f(t,x)dx + \int_0^A f(t,x)dx - \int_0^A f(0,x)dx + \int_0^A f(0,x)dx - F(0)\right| \\ &\leqslant \left|\int_A^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-tx} dx\right| + \left|\int_0^A (e^{-tx}-1)\frac{\sin x}{x} dx\right| + \left|\int_A^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx\right| \end{aligned}$$

Pour $B > A$, on a :

$$\int_A^B \frac{\sin x}{x} e^{-tx} dx = \mathrm{Im}\left(\int_A^B \frac{e^{(i-t)x}}{x} dx\right) = \mathrm{Im}\left(\left[\frac{e^{(i-t)x}}{(i-t)x}\right]_A^B + \int_A^B \frac{e^{(i-t)x}}{(i-t)x^2}\, dx\right)$$
$$= \mathrm{Im}\left(\frac{e^{(i-t)B}}{(i-t)B} - \frac{e^{(i-t)A}}{(i-t)A} + \int_A^B \frac{e^{(i-t)x}}{(i-t)x^2}\, dx\right)$$

En faisant tendre B vers $+\infty$, on obtient :

$$\left|\int_A^B \frac{\sin x}{x} e^{-tx} dx\right| = \left|\mathrm{Im}\left(-\frac{e^{(i-t)A}}{(i-t)A} + \int_A^{+\infty} \frac{e^{(i-t)x}}{(i-t)x^2}\, dx\right)\right|$$
$$\leqslant \left|\frac{e^{(i-t)A}}{(i-t)A}\right| + \left|\int_A^{+\infty} \frac{e^{(i-t)x}}{(i-t)x^2}\, dx\right| = \frac{1}{|i-t|A} + \frac{1}{|i-t|}\int_A^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx \leqslant \frac{2}{A}$$

Fixons $\varepsilon > 0$, et choisissons A tel que $\frac{2}{A} \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$ et $\left|\int_A^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$. Alors, pour tout $t \geqslant 0$, on a :

$$|F(t) - F(0)| \leqslant \frac{2\varepsilon}{3} + \left|\int_0^A (e^{-tx} - 1)\frac{\sin x}{x} dx\right|$$

Par convergence dominée, cette dernière intégrale tend vers 0 lorsque t tend vers 0. Donc $|F(t) - F(0)| \leqslant \varepsilon$ pour t assez petit, et F est continue en 0.

Étape 5 : Conclusion.

On a finalement :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = F(0) = -\arctan(0) + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

□

Références

[Can09] B. Candelpergher. *Calcul intégral.* Cassini